## تحويل المعادلات التكاملية وتمييز

### ١ـ تعريف المعادلات التكاملية

تعريف: نقول عن معادلة انها معادلة تكاملية اذا ظهر فيها التابع المجهول تحت اشارة تكامل ايضاً

مثال: كنا نبحث عن حل المعادلة التفاضلية العادية $y' = f(x,y)$ بالشرط الابتدائي $y = y_0$ عندما $x = x_0$ فان هذه المسألة ترد الى البحث عن حل المعادلة التكاملية الآتية « بمكاملة المعادلة التفاضلية المعطاة » نحصل على

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt + y_0$$

وترد بطريقة مماثلة المعادلة التفاضلية من المرتبة الثانية المرافقة للشروط الابتدائية الآتية (مسألة القيم الحدية)

$$y'' = f(x,y) \quad \text{---} \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y'_0$$

الى معادلة تكاملية وذلك بمكاملة المعادلة التفاضلية المعطاة مرتين بالنسبة لـ $x$

$$y'(x) = \int_{x_0}^{x} f(z, y(z))\,dz + y'_0$$

نكامل مرة ثانية بالنسبة لـ $x$ من $x_0$ الى $x$ نحصل على

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} dt \int_{x_0}^{t} f(z, y(z))\,dz + y'_0(x - x_0) + y_0$$

والعلاقة الاخيرة يمكن كتابتها على الشكل التالي باعتبار علاقة ... التالية

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \int_{x_0}^{t} g(z)\,dz = \int_{x_0}^{x} g(z)\,dz \int_{z}^{x} f(t)\,dt$$

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(z, y(z))\,dz \int_{z}^{x} dt + y'_0(x - x_0) + y_0$$

$$= \int_{x_0}^{x} (x - z) f(z, y(z))\,dz + y'_0(x - x_0) + y_0$$

لأن ثم الحل العام للمعادلة التفاضلية (1) ينتج من حل المعادلة التكاملية الآتية

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} (x - z) f(z, y(z))\,dz + c_1 x + c_2 \quad \text{--} \quad (2)$$

$c_1, c_2$ ثابتات كيفية والحد الاول من التكامل يمكن ان نكتبه يساوي الصفر

- لننظر الآن في مسألة القيم الحدية للمعادلة (1) ولنبحث عن ذلك الحل الذي يحقق الشروط الحدية الآتية

$$[\,y(0) = a \qquad y(\ell) = b\,] \quad (3)$$

حل المعادلة (1) ينتج عن حل المعادلة التكاملية (2) اي ينتج عن العلاقة

$$y(x) = \int_{0}^{x} (x - z) f(z, y(z))\,dz + c_1 x + c_2$$

بالاستفادة من الشروط المعطاة نحصل على $c_2 = a$

$$b = \int_{0}^{\ell} (\ell - z) f(z, y(z))\,dz + c_1 \ell + c_2$$

$$\frac{b-a}{2} - \int_{0}^{\ell} \frac{\ell - z}{\ell} f(z, y(z))\,dz = c_1$$

نبدل $c_1$ و $c_2$ بما يساويها في عبارة ... نحصل على

$$y(x) = \int_{0}^{x} (x - z) f(z, y(z))\,dz + \frac{b-a}{\ell} x - \int_{0}^{\ell} \frac{\ell - z}{\ell} f(z, y(z))\,dz + a$$

$$y(x) = F(x) + \int_0^x (x-z)\, f(z, y(z))\, dz - \int_0^\ell \frac{x(\ell - z)}{\ell} f(z, y(z))\, dz \quad (4)$$

حيث: $F(x) = \frac{b-a}{\ell} x + a$

وبإجراء [illegible] على (4) [illegible]

$\int_0^\ell = \int_0^x + \int_x^\ell$ [illegible] التكامل الثاني

$$y(x) = F(x) + \int_0^x (x-z) f(z, y(z))\, dz - \int_0^x \frac{x(\ell - z)}{\ell} f(z, y(z))\, dz - \int_x^\ell \frac{x(\ell - z)}{\ell} f(z, y(z))\, dz$$

$$= F(x) - \int_0^x \frac{z(\ell - x)}{\ell} f(z, y(z))\, dz - \int_x^\ell \frac{x(\ell - z)}{\ell} f(z, y(z))\, dz \quad (5)$$

وإذا عرفنا تابعاً جديداً [illegible]

$$K(x,z) = \begin{cases} \frac{z(\ell - x)}{\ell} & z \le x \\ \frac{x(\ell - z)}{\ell} & x \le z \end{cases}$$

[illegible]

$$y(x) = F(x) - \int_0^\ell K(x,z)\, f(z, y(z))\, dz \quad (6)$$

تلخص هذه [illegible] إيجاد حل المسألة الحدية الآتية المعرفة بالمعادلات الآتية

$$\left.\begin{aligned} &y'' + p(x) y = f(x) \\ &y(0) = a \qquad y(\ell) = b \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

حل: [illegible]

$$y'' = f(x) - p(x) y$$

[illegible] حل من المعادلة التكاملية

$$y(x) = F(x) - \int_0^\ell K(x,z) \left[ f(z) - p(z) \cdot y(z) \right] dz$$

$$= F(x) - \int_0^\ell K(x,z) f(z)\, dz + \int_0^\ell K(x,z)\, p(z)\, y(z)\, dz$$

$$y(x) = F_1(x) + \int_0^\ell K(x,z)\, p(z)\, y(z)\, dz \quad (8)$$

[illegible] المعادلة التكاملية (8) [illegible] $y(x)$ [illegible]

$F(x)$ [illegible] $x$

ملاحظة: [illegible]

التكامل في المعادلة (2) [illegible]

[illegible] التكامل في المعادلة التكاملية

(8) [illegible]

في العلاقة [illegible] (8) [illegible] التابع المجهول

[illegible] رمز التكامل فقط [illegible]

التكامل أيضاً [illegible]

[illegible]

المعادلة التكاملية بطريقة التقريبات

المتتالية التي [illegible]

بعض الخواص المميزة للتابع $K(x,z)$ [illegible]

[illegible] نواة المعادلة التكاملية

(1) النواة $K(x,z)$ مستمرة في المربع $K_0$

$K_0:\ 0 \le x \le \ell,\quad 0 \le z \le \ell$

(2) المشتق الاول لـ ه النواة يعاني انقطاعاً على القطر $x = z$ ايضاً المربع اعلاه

$$K_x(x,z)\Big|_{\substack{x=z+0\\(z\le x)}} - K_x(x,z)\Big|_{\substack{x=z-0\\ z\le x}} = -1$$

الاثبات:

$$K_x(x,z)\Big|_{x=z+0} = \frac{-z}{\ell} \qquad z \le x$$

$$K_x(x,z)\Big|_{x=z-0} = \frac{\ell-z}{\ell} \qquad z \geq 0$$

$$-\frac{z}{\ell} - \frac{\ell-z}{\ell} = \frac{-\ell}{\ell} = -1$$

(3) النواة $K(x,z)$ تحقق معادلة تفاضلية $y'' = 0$ وذلك من تعريف النواة وايضاً تحقق الشروط الحدية الصفرية

(4) النواة $K(x,z)$ تتمتع بالصفة التناظرية

$$K(x,z) = K(z,x)$$

وذلك واضح من تعريف النواة

$$K(x,z) = \begin{cases} \dfrac{z(\ell-x)}{\ell} & z \le x \\ \dfrac{x(\ell-z)}{\ell} & x \le z \end{cases}$$

$$K(z,x) = \begin{cases} \dfrac{x(\ell-z)}{\ell} & x \le z \\ \dfrac{z(\ell-x)}{\ell} & z \le x \end{cases}$$

مجموعة الدوال المتعامدة: تعاريف وخواص هامة

ان التوابع الحقيقية $g_1(x), g_2(x)$ --- (1) التي نفرضها مستمرة في مجال $[a,b]$ تشكل في

هذا المجال مجموعة متعامدة منظمة اذا تحققت الشروط

$$\int_a^b g_p(x)\,g_q(x)\,dx = \begin{cases} 0 & ; \quad p \neq q \\ 1 & ; \quad p = q \end{cases} \quad (2)$$

واذا كان $f(x)$ تابعاً تحليلياً مستمراً ومعرفاً في المجال $[a,b]$ فإننا نسمي الاعداد

$$C_k = \int_a^b f(x)\,g_k(x)\,dx \quad ---(3)$$

أمثال فورييه للتابع $f(x)$ بالنسبة للمجموعة (1)

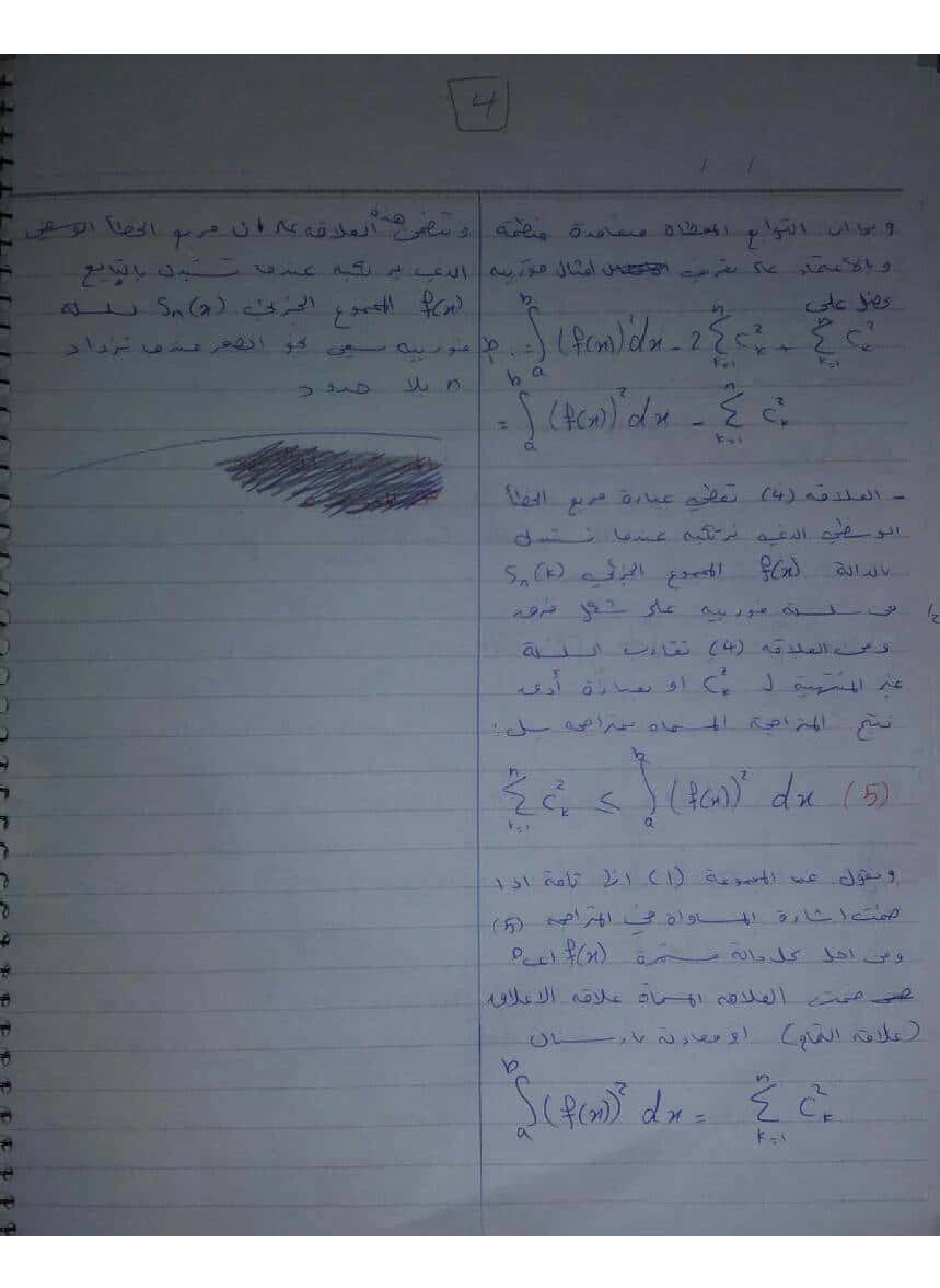
- ومن تعريف الامثال $C_k$ ينتج المطابقة التالية

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k g_k(x)\right]^2 dx = \int_a^b [f(x)]^2 dx - \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \quad ---(4)$$

الاثبات:

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k g_k(x)\right]^2 dx = \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2\int_a^b \left(f(x)\sum_{k=1}^{n} C_k g_k(x)\right) dx + \int_a^b \sum_{k=1}^{n} C_k^2 g_k^2(x)\,dx$$

$$= \int_a^b (f(x))^2 dx - 2\sum_{k=1}^{n} C_k \int_a^b f(x)\,g_k(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} C_k^2 \int_a^b g_k(x)\,g_k(x)\,dx$$





وبما ان الدوال المعطاة متعامدة منتظمة وبالاعتماد على تعريف امثال فورييه نحصل على

$$\int_a^b (f(x))^2 dx - 2\sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \int_a^b (f(x))^2 dx - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

- العلاقة (4) تعطي عبارة مربع الخطأ الوسطي الذي نرتكبه عندما نستبدل بالدالة $f(x)$ المجموع الجزئي $S_n(x)$ من سلسلة فورييه على شكل مربعه

ومن العلاقة (4) تقارب السلسلة غير المنتهية لـ $c_k^2$ او بعبارة أدق ينتج المتراجحة المسماة متراجحة بسل:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \le \int_a^b (f(x))^2 dx \quad (5)$$

ونقول عن المجموعة (1) انها تامة اذا صحت اشارة المساواة في المتراجحة (5) ومن اجل كل دالة مستمرة $f(x)$ اعتباطية صحت العلاقة المسماة علاقة الاغلاق (علاقة التمام) او معادلة بارسفال

$$\int_a^b (f(x))^2 dx = \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

وتعني هذه العلاقة ان مربع الخطأ الوسطي الذي نرتكبه عندما نستبدل بالتابع $f(x)$ المجموع الجزئي $S_n(x)$ لسلسلة فورييه يسعى نحو الصفر عندما تزداد $n$ بلا حدود